**第40讲 不定方程**

**一、知识要点**

当方程的个数比方程中未知数的个数少时，我们就称这样的方程为不定方程。如5x－3y＝9就是不定方程。这种方程的解是不确定的。如果不加限制的话，它的解有无数个；如果附加一些限制条件，那么它的解的个数就是有限的了。如5x－3y＝9的解有：

x＝2.4 x＝2.7 x＝3.06 x＝3.6

y＝1 y＝1.5 y＝2.1 y＝3

如果限定x、y的解是小于5的整数，那么解就只有x＝3，Y＝2这一组了。因此，研究不定方程主要就是分析讨论这些限制条件对解的影响。

解不定方程时一般要将原方程适当变形，把其中的一个未知数用另一个未知数来表示，然后再一定范围内试验求解。解题时要注意观察未知数的特点，尽量缩小未知数的取值范围，减少试验的次数。

对于有3个未知数的不定方程组，可用削去法把它转化为二元一次不定方程再求解。

解答应用题时，要根据题中的限制条件（有时是明显的，有时是隐蔽的）取适当的值。

**二、精讲精练**

**【例题1】**求3x+4y＝23的自然数解。

先将原方程变形，y＝。可列表试验求解：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Y | 5 | × | × | × | 2 | × | × |

所以方程3x+4y＝23的自然数解为

 X=1 x=5

 Y=5 y=2

**练习1**

1、求3x+2y＝25的自然数解。

2、求4x+5y＝37的自然数解。

3、求5x－3y＝16的最小自然数解。

**【例题2】**求下列方程组的正整数解。

5x+7y+3z＝25

3x－y－6z＝2

这是一个三元一次不定方程组。解答的实话，要先设法消去其中的一个未知数，将方程组简化成例1那样的不定方程。

5x+7y+3z＝25 ①

3x－y－6z＝2 ②

由①×2+②，得13x+13y＝52

 X+y＝4 ③

把③式变形，得y＝4－x。

因为x、y、z都是正整数，所以x只能取1、2、3.

当x＝1时，y＝3

当x＝2时，y＝2

当x＝3时，y＝1

把上面的结果再分别代入①或②，得x＝1，y＝3时，z无正整数解。

 x＝2，y＝2时，z也无正整数解。

 x＝3时，y＝1时，z＝1.

所以，原方程组的正整数解为 x＝1

 y＝1

 z＝1

**练习2**

求下面方程组的自然数解。

1、4x+3y－2z＝7 2、 7x+9y+11z＝68

3x+2y+4z＝21 5x+7y+9z＝52

3、5x+7y+4z＝26

3x－y－6z＝2

**【例题3】**一个商人将弹子放进两种盒子里，每个大盒子装12个，每个小盒子装5个，恰好装完。如果弹子数为99，盒子数大于9，问两种盒子各有多少个？

两种盒子的个数都应该是自然数，所以要根据题意列出不定方程，再求出它的自然数解。

设大盒子有x个，小盒子有y个，则

 12x+5y＝99（x＞0，y＞0，x+y＞9）

 y＝（99－12y）÷5

经检验，符合条件的解有： x＝2 x＝7

y＝15 y＝3

所以，大盒子有2个，小盒子有15个，或大盒子有7个，小盒子有3个。

**练习3.**

1、某校6（1）班学生48人到公园划船。如果每只小船可坐3人，每只大船可坐5人。那么需要小船和大船各几只？（大、小船都有）

2、甲级铅笔7角钱一枝，乙级铅笔3角钱一枝，小华用六元钱恰好可以买两种不同的铅笔共几枝？

3、小华和小强各用6角4分买了若干枝铅笔，他们买来的铅笔中都是5分一枝和7分一枝的两种，而且小华买来的铅笔比小强多，小华比小强多买来多少枝？

**【例题4】**买三种水果30千克，共用去80元。其中苹果每千克4元，橘子每千克3元，梨每千克2元。问三种水果各买了多少千克？

设苹果买了x千克，橘子买了y千克，梨买了（30－x－y）千克。根据题意得：

 4x+3y+2×（30－x－y）＝82

 x＝10－

由式子可知：y<20，则y必须是2的倍数，所以y可取2、4、6、8、10、12、14、16、18。因此，原方程的解如下表：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 苹果 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 橘子 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 梨 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |

**练习4**

1、有红、黄、蓝三种颜色的皮球共26只，其中蓝皮球的只数是黄皮球的9倍，蓝皮球有多少只？

2、用10元钱买25枝笔。已知毛笔每枝2角，彩色笔每枝4角，钢笔每枝9角。问每种笔各买几枝？（每种都要买）

3、晓敏在文具店买了三种贴纸；普通贴纸每张8分，荧光纸每张1角，高级纸每张2角。她一共用了一元两角两分钱。那么，晓敏的三种贴纸的总数最少是多少张？

**【例题5】**某次数学竞赛准备例2枝铅笔作为奖品发给获得一、二、三等奖的学生。原计划一等奖每人发6枝，二等奖每人发3枝，三等奖每人发2枝。后又改为一等奖每人发9枝，二等奖每人发4枝，三等奖每人发1枝。问：一、二、三等奖的学生各有几人？

设一等奖有x人，二等奖有y人，三等奖有z人。则

 6x+3y+2z＝22 ①

 9x+4y+z＝22 ②

由②×2－①，得12x+5y＝22

 y ＝ x＝1

x只能取1。Y＝2，代入①得z＝5，原方程的解为 y＝2

z＝5

所以，一等奖的学生有1人，二等奖的学生有2人，三等奖的学生有5人。

**练习5**

1、某人打靶，8发打了53环，全部命中在10环、7环和5环。他命中10环、7环和5环各几发？

2、篮子里有煮蛋、茶叶蛋和皮蛋30个，价值24元。已知煮蛋每个0.60元，茶叶蛋每个1元，皮蛋每个1.20元。问篮子里最多有几个皮蛋？

3、一头猪卖3个银币，一头山羊卖1个银币，一头绵羊买个银币。有人用100个银币卖了这三种牲畜100头。问猪、山羊、绵羊各几头？